一次元カオスについて (確率過程論と開放系の統計力学 II)

高橋, 陽一郎

数理解析研究所講究録
405巻 1980年 194-207

一次元カオスについて

東大 教養　髙橋陽一郎

0. 一次元力学系に対する変分原理とカオス

格子系の古典統計力学における平衡状態μは，次の変分原理によって，"熱力学的"に，特徴づけられる．

(1)
$$S(\mu)-\langle\beta U\rangle_\mu \longrightarrow \max = P(\beta U)$$

ここで，$S(\mu)$，$\langle\beta U\rangle_\mu$ は，state μ の下での，site 当りの平均エントロピー及び平均エネルギー，$\beta>0$ は温度の逆数である．熱力学的極限 $P(\beta U)$ は，一次元格子$\mathbb{Z}$の場合，Artin-Mazur-Ruelle のゼータ函数

(2)
$$\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}Z_n\right\},\qquad Z_n=\sum_{\omega:\sigma^n\omega}e^{-\sum_{t=0}^{n-1}\beta U(\sigma^t\omega)}$$

の収束半径 R によって，$P(\beta U)=-\log R$ として与えられる．ただし，σ は，$\mathbb{Z}$上の configuration $\omega=(\omega_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ のずらしで，

$$(\sigma\omega)_t=\omega_{t+1}\qquad(t\in\mathbb{Z})$$

一次元力学系 (J, f) に対するカオスの問題は，以下に述べるように未だ不完全ではあるが，上と同様の，次のような変分原理による定式化が可能である．ただし，J としては，主として，区間，又は，円周，変換 $f: J \to J$ は必要なだけの滑かさを仮定する．$h_\mu(f)$ は，測度論的エントロピーとして，

$$(3) \qquad h_\mu(f) - \beta \int_J \log |f'(x)| \mu(dx) \longrightarrow \max. \quad \begin{pmatrix} \mu \text{ は } f\text{-不変な} \\ \text{確率測度} \\ \beta \geq 0 \end{pmatrix}$$

この右辺の max を与えるものとして，(2) と同類のもの，ただし，その逆数，を導入する：

$$(4) \qquad D_f(z) = \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} Q_n\right\}, \qquad Q_n = \sum_{x: f^n x = x} \frac{1}{\left|\frac{d(f^n)}{dx}(x)\right|^\beta}$$

この巾級数 $D_f(z)$ の最小の正の零点を $e^{-P_\beta(f)}$ と書く．もし，$P_\beta(f)$ が (3) の max と一致すれば，変分原理が成立すると呼ぶことにする．なお，ここで考えるのは，$\beta = 0, 1$ の場合で，$\beta = 0$ の時には，$x^0 \equiv 1$ と約束する．

この報告では詳しくは述べない $\beta = 0$ の場合の結果に最初に触れておこう．この時，(3), (4) は，f' に，言いかえれば，力学系 (J, f) の微分構造と無関係に，位相的なレベルの性質を記述している：$P_0(f)$ は，位相的エントロピー $\mathrm{ent}(J, f)$ と一致し，さらに，(3) の max とも一致する．即ち，変分原理が成立する．$\beta = 0$ の時には，次の定理が知られている．

<u>定理 0</u>. 次の4条件は互に同値である.

(i) $\mathrm{ent}(J, f) > 0$

(ii) 周期 $n \notin \{2^m ; m \geqq 0\}$ の周期点 $x \in J$ が存在する.

(iii) (J, f) は, <u>位相的カオス</u>である, i.e., ある n に対して, f^n で不変な部分集合 $J_0 \subset J$ を選べば, (J_0, f^n) はマルコフ型のずらし(shift)と同型である. (この時, Li-Yorke の意味のカオスでもある)

(iv) ある f-不変測度 μ に関して, 軌道 $x_0, x_1 = f(x_0), \cdots, x_{n+1} = f(x_n), \cdots$ は, (多重) マルコフ連鎖となる.

<u>Remark</u> $P_0(f) = \mathrm{ent}(J, f) \geqq 0$ は自明であるから, この定理は, 熱力学的極限に相当する量 $P_0(f)$ の値によって, 位相的カオスの存否が判定されることを示している. なお, $P_0(f) = 0$ の場合には, ある自然数 n に対して, f は, 2^k 周期, $0 \leqq k \leqq n$ の周期軌道をもち, 他の周期軌道をもたない場合と, すべての n に対して, 2^n 周期の軌道をもつ場合に分かれる. 前者の場合, 最高次の周期 2^n の軌道が安定であり, カオスということばとは程遠い. しかし, 後の場合, 概周期運動をする部分があり, Li-Yorke の意味ではカオスである. この時, (J, f) は混合的でないので, 位相的カオス (Y. Oono は formal chaos と呼んでいる) の方が適切な概念と思われる.

1. 観測可能なカオス：主定理

この報告で述べるのは，$\beta=1$ の場合である．この時，(3)(4) は，(J,f) の微分構造に陽に依存している．実際，この場合は，次のような問題を考えるのに適切である：

(5) $\begin{cases} \text{ほとんどすべての出発点 } x_0\in J \text{ に対して，} \\ \text{軌道 } x_0,\ x_1=f(x_0),\ \cdots\cdots \text{ は混合的か} \end{cases}$

ここで，「ほとんどすべて」は，通常のルベーグ測度 dx に関して考える．それは，(J,f) を物理系と考えて実験(＝数値実験）した場合に，観測にかかる種類の現象かどうか，という意味で，その典型的な場合は，f-不変な不変密度函数 $\varphi(x)$ が存在して，$(J,f,\varphi(x)dx)$ が混合的になる場合である．一般的に次のように定式化する．

定義．力学系 (J,f) が observable chaos とは，混合的な，(J,f) の漸近測度の存在することを言う．ただし，μ が漸近測度 (asymptotic measure) とは，ほとんどすべての $x\in J$ に対し，

$$\exists \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(f^i x)=\int_J\varphi(y)\mu(dy)\quad(\forall\varphi:\text{連続函数})$$

が成立することを言う．(より一般的には，この等式の成立する x の集合のルベーグ測度が正であることのみ要求する．)

絶対連続な不変測度は，もちろん，漸近測度である．

定理 1. $P_1(f)>0 \Leftrightarrow$ 安定な周期軌道の存在

定理 2. 絶対連続な不変測度の存在*) $\Longrightarrow P_1(f)=0$.

定理 3. f が区分的に C^1 級で，$\log|f'(x)|$ が有界であれば，つねに，$P_1(f)\geqq 0$. で，平衡測度**) が存在する.

定理 4. 上の定理1-3の仮定の下で，つねに，変分原理が成立する.

変分原理の成立しない例，$P_1(f)<0$ なる例は後で述べる. ここで，(3)の左辺の第2項の意味を確めておこう. 今，μ をエルゴード的な不変測度とすれば，Birkhoffの定理から，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\log|f'(f^i(x))| = \int \log|f'(y)|\mu(dy), \quad \mu\text{-a.e. } x$$

従って，これは，$\frac{1}{n}\log\left|\frac{d(f^n)}{dx}(x)\right|$ の極限に等しく，点 x での $n\to\infty$ での f^n の平均拡大率をあらわす. これは，Liapunovの特性指数の特別の場合である. とくに，すべての周期軌道が不安定で，絶対連続な不変測度 μ が存在する時には，これは平衡測度となり，その測度論的エントロピー $h_\mu(f)$ は，定理2より，

$$h_\mu(f) = \int \log|f'(x)|\mu(dx)$$

と計算される.

*) 安定な周期軌道がない場合

**) (3)のmaxを与える測度 μ を，(J, f) の平衡測度と呼ぶ.

2. 作用素 $\mathcal{L}_f$ の Fredholm 行列式

前節に述べた定理の成立する背景には，以下のような事実がある．先ず，古典統計力学で transfer matrix と呼ばれているものと対応する作用素 $\mathcal{L}_f$ を導入しよう．

$$(\mathcal{L}_f\varphi)(x) = \sum_{y\in f^{-1}\{x\}} \frac{\varphi(y)}{|f'(y)|} \qquad (\varphi\in L^1 \equiv L^1(J, dx))$$

この時，次の性質はあきらかであろう．

1°). 測度 $\varphi(x)dx$ の f による像は，測度 $(\mathcal{L}_f\varphi)(x)dx$ である．

2°). L^1 上の作用素 $\mathcal{L}_f$ は非負で，そのノルムは 1 である．

3°). 絶対連続な不変測度 μ の存在 ($\mu(dx)=\varphi(x)dx$) と，$\mathcal{L}_f\varphi=\varphi$ なる φ の存在，言いかえれば，$\mathcal{L}_f$ が固有値 1 をもつこととは同値である．

次節で例を挙げるが，一般に作用素 $\mathcal{L}_f$ は compact operator とはならない．compact になる例としては，Hölder 連続な導函数 f' をもつマルコフ型の変換の場合がある．ただし，

<u>定義</u>. 有界閉区間 $J=[a,b]$ の連続な変換 f が単純マルコフ型であるとは，次のような分割 $c_0=a<c_1<\cdots<c_\ell=b$ の存在することをいう．

(イ). 各部分区間 $[c_{i-1}, c_i]$ 上で，f は単調．

(ロ). 分点 c_i の f による像は再び分点 i.e. $f\{c_i\}\subset\{c_i\}$

f がマルコフ型とは，ある $p\geq 1$ に対して，f^p が単純マルコフ

型であることをいう.(より詳しくは,p重マルコフ型)

単純マルコフ型変換fが分点を結ぶ折線で定義されていれば,条件

$$\mathcal{L}_f\left(\sum_i \alpha_i 1_{(c_{i-1},c_i)}\right)=\sum_i\left(\sum_j L(f)_{ij}\alpha_j\right)1_{(c_{i-1},c_i)}$$

によって,行列$L(f)=(L(f)_{ij})$を定義できる.ただし,1_Aは集合Aの定義函数とする.この時,次の性質は見易い.

4°).(イ)

$$D_f(z)=\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\operatorname{Tr}L(f)^n\right\}=\det(I-zL(f)),$$

ただし,0節(4)のQ_nの定義において,集合$\{x;f^n x=x\}$が無限集合となる場合は,その各連結成分を一点と見なして和をとることとする.

(ロ).$\mathcal{L}_f$はcompact作用素で,純点スペクトルをもち,その固有値は,0及び$L(f)$の固有値である.従って,$D_f(z)$は作用素$\mathcal{L}_f$のFredholm行列式$\displaystyle\prod_{\lambda:\mathcal{L}_f\text{の固有値}}(1-z\lambda)$と一致する.

p重マルコフ型折線変換の場合も(イ),(ロ)が成立する.この事と,次の自明な命題によって,一般のfに対しても,$D_f(z)$は$\mathcal{L}_f$のFredholm行列式(に相当するもの)と考えられる.

<u>命題</u>.fを区分的にC^2級の変換,f_nをマルコフ型折線変換とする.f_nがfに一様収束し,f_n'がf'に各点収束していれば,$D_{f_n}(z)$は形式的巾級数として,$D_f(z)$に収束する.

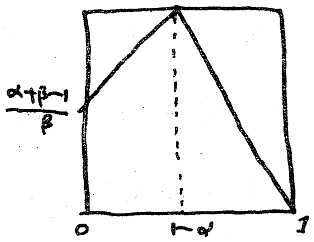
この命題によって,$\mathcal{L}_f$が固有値1をもつことと,

$D_f(I)=0$ と，$P_1(f)=0$ とが，ほぼ同値となることが予想される．

3. 単峰折線変換の場合．

$0<\alpha<1$，$\beta>0$，$\alpha+\beta\geqq 1$ として，

$$f_{\alpha,\beta}(x)=\begin{cases}\beta^{-1}(x+\alpha+\beta-1) & (0\leqq x\leqq 1-\alpha)\\ \alpha^{-1}(1-x) & (1-\alpha\leqq x\leqq 1)\end{cases}$$



の形の変換を，単峰折線(Unimodal linear)変換とよぶ．これは[ITN]で詳しく研究され，次のような性質をもつ．(cf. [Tブ])

<u>UML 1</u> ([ITN])

(a) 絶対連続な不変測度の存在しないパラメタ(α,β)の範囲は，次の集合 W_k の和集合である．($k=1,2,3,\cdots$)

$W_1:\ \beta>1$，　$W_2:\ \beta<1,\ \alpha\beta>1$．　$W_3:\ \alpha\beta^2>1,\ \alpha\beta(\alpha+\beta)>1$ etc.

この時，$(\alpha,\beta)\in W_k$ ならば，安定な周期 k の周期軌道 C が唯一つ存在し，a.e. x から出発した軌道は C に近づく．

(b) 絶対連続な不変測度 $\mu_{\alpha,\beta}$ が存在するならば，その不変密度は，$\varphi_{\alpha,\beta}(x)\vee 0$ を規格化したものである．ただし，

$$\varphi_{\alpha,\beta}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-\alpha)^{p_n}\beta^{n-p_n}\,1(x>f^n_{\alpha,\beta}0)$$
$$p_n=\#\{0\leqq t<n\ ;\ f^t_{\alpha,\beta}0>1-\alpha\}$$

(c). (α,β)が，W_k と隣接する領域 I_k ($k=2,3,4,\cdots$) に属さない時，$\mu_{\alpha,\beta}$ の台は $[0,1]$ 全体で，$([0,1],f_{\alpha,\beta},\mu_{\alpha,\beta})$ は混合的．

(d). $(\alpha,\beta)\in I_k$, $k\geqq 3$, の時，$\mu_{\alpha,\beta}$ の台は k 個の区間 $J_1,\cdots,J_k$ に含まれる．ただし，$J_i\cap J_j=\phi$ $(i\neq j)$．$(\alpha,\beta)\in I_2$ の時には，$k=2^m q$ $(m\geqq 1)$ の区間 $J_1,\cdots,J_{2^m}$ に含まれる．いずれの場合も，各 $(J_i, f^k_{\alpha,\beta}|J_i, \mu_{\alpha,\beta}|J_i)$ は混合的だが，$([0,1], f_{\alpha,\beta}, \mu_{\alpha,\beta})$ は単にエルゴード的である．

<u>Remark</u>. $(\alpha,\beta)\in W_k$ の場合 (a) は，R.May が窓 window と呼んだ現象の生じている場合である．(d) は $\mu_{\alpha,\beta}$ の台の様子から島と呼ばれる現象である．残る (c) が observable chaos．

<u>UML 2</u>　$D_{\alpha,\beta}(z)=D_{f_{\alpha,\beta}}(z)$ は以下の性質をもつ．

(i). $D_{\alpha,\beta}(z)=1-\alpha\sum_{n=0}^{\infty}(-\alpha)^{p_n}\beta^{n-p_n}z^{n+1}$

(ii) $D_{\alpha,\beta}(\lambda)=0$ ならば，

$$\tau_\lambda(x)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}(-\alpha)^{p_n}\beta^{n-p_n}\lambda^n 1(x>f^n_{\alpha,\beta}0)=\lambda\mathcal{L}_{f_{\alpha,\beta}}\tau_\lambda(x).$$

(iii) $(\alpha,\beta)\in W_k$ の時，$P_1(f_{\alpha,\beta})=-\frac{1}{k}\log\alpha\beta^{k-1}>0$　$(k\geqq 1)$.

そうでない時，　$P_1(f_{\alpha,\beta})=0$.

(iv). $(\alpha,\beta)\in I_k$ の時，$\#\{z\,;\,|z|=1,\ D_{\alpha,\beta}(z)=0\}=\begin{cases}k & (k\geqq 3)\\ 2^m & (k=2)\end{cases}$

また，$(\alpha,\beta)\notin\bigcup W_k\cup\bigcup I_k$ の時，

$$D_{\alpha,\beta}(z)=0,\ z\neq 1\ \Rightarrow\ |z|>1.$$

(v). $f_{\alpha,\beta}$ がマルコフ型 $\Longleftrightarrow$ $D_{\alpha,\beta}(z)$ が有理函数

(vi) $f_{\alpha,\beta}$ がマルコフ型でない $\Longleftrightarrow$ $D_{\alpha,\beta}(z)$ は自然境界をもつ巾級数.

証明は，(ii), (iii), (iv) は直接計算による．マルコフ型の時の主張 (v), (i) はあきらか．(vi) は Hadamard の meromorphic radius の計算による．残りの中で本質的な部分は，マルコフ型の f による近似の方法である．

この結果は，冒頭に述べた，$P_1(f)$ あるいは，$D_f(z)$ の性質によって，単峰折線変換のカオスに関連する問題が，不変密度の存在のみならず台の数もこめて，見事に分類されることを示している．

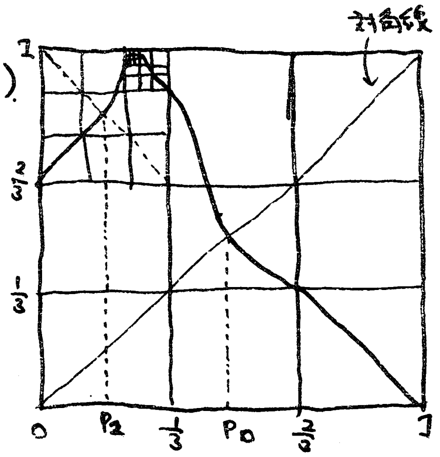
なお，(vi) は，(ii) とあわせれば，作用素 $\mathcal{L}_{f_{\alpha,\beta}}$ の固有値が，0 でない集積点をもつことを意味している．従って，とくに，$\mathcal{L}_f$ は compact operator ではありえない．

最後に，位相的レベルの結果 ($P_0(f) \gtrless 0$) と比較すれば，一次元の変換の場合でも，observable chaos の問題は複雑な様相をもっていることに注意しておこう．さらに，[ITN] によれば，各 $W_k \cup I_k$ 内にパラメタのある時，$ent(f_{\alpha,\beta})$ は一定値をとることが知られている ($k \geqq 3$)　逆に言えば，島，窓のような，$D_f(z)$ のことばで言えば普通 ($\mathcal{L}_f$ のノルム 1 が固有値) でない現象は，$ent(f)$ が flat な領域のみで生じている．これも，一般の力学系に対して予想できよう．この予想を象徴的に書けば，

$$\delta[ent(f)] \neq 0 \implies P_1(f) = 0.$$

4. 不変な Cantor set

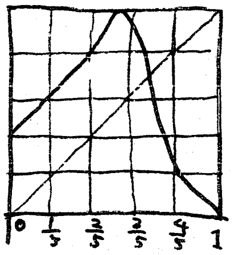
以下の例は，少くとも筆者には，C^1級の区間の変換に対して，実際に成立しているかどうかはあきらかではない．（少くとも，連続で，一点を除いてC^∞級となる例はあるが．）しかし，一つには，少くとも，滑かな変換族の極限として，臨界的な現象の起こる場合に相当すること，他方，高次元の変換から，例えば，Poincare写像，Lorenz plot 等の手法その他によって，一次元に帰着された変換は，そのものが滑らかであっても，区分的な滑らかさしか保証されないことから，考察の対象に含めざるを得ない．



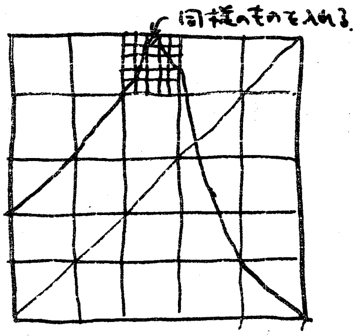
例1．（2巾周期をすべてもつ例）右図のように，区間 $I=[0,1]$ を三等分し，$[\frac{2}{3},1]$ では逆対角線と一致させ，$[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$ では，$f(\frac{1}{3})=\frac{8}{9}$ として滑かな曲線で結ぶ．$[0,\frac{1}{3}]$ は，さらに三等分して，同様の手続きでグラフを定め，これを無限回くり返してグラフ f を作る．この時，$[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$ 上の曲線が適当な条件をみたせば，この中に唯一つの不動点 p_0 をもち，$[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]\setminus\{p_0\}$ の任意の点の軌道は，いつか，$[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$ の外に出て，再び戻らないようにできる．さらに，この時，$f'(p_0)<-1$ は任意に選べる．次に，$[\frac{1}{9},\frac{2}{9}]$ 内

に，周期2の周期点 p_2 が唯一つ入るようにとれ，$f'(p_2)>1$ は任意に選べ，$x\in[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$, $x\neq p_2$ から出発する軌道は，ある時刻以後，再び $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$ に戻らないようにできる．これをくり返せば，各 $m=0,1,2,\cdots$ に対して，唯一つの周期 2^m の軌道 $\{f^i p_m\}$ をもち，これらの周期軌道に属さない点の軌道は，古典的な Cantor 集合 $C=\{x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}\ ;\ a_n=0$ 又は $2\}$ に必ず近づくようにできる．さらに，$[\frac{2}{9},\frac{3}{9}]$, $[0,\frac{1}{9}]$ etc 上グラフが傾き±1 でなったことから，C 上の一様測度 μ は，この変換 f の漸近測度である．ゆえに，observable chaos の視点からは，この系の性質は，μ のみによって定まる．一方，$f'(p_m)$ は任意性があった $(m\geq 0)$ から，$D_f(z)$ は，任意性をやはりもち，とくに，$P_1(f)$ は，任意の値 ≤ 0 をとることができる．一方で，f を C 上に制限して，不変測度 μ をコミにして得られる系 (C,f,μ) は，エルゴード的で，弱混合でなく，エントロピーが 0 である．ゆえに，変分原理が成立しない場合がある．また，$P_1(f)$ は，漸近測度 μ の情報を全く与えていない．この意味では，冒頭に述べた approach の反例として致命的である．ただし，f' の有界性を仮定すれば，$P_1(f)=0$ となり，我々の枠組からははずれていないものと考えてよい．

例12．（無限重の島）．次頁の左側の図は島が3つ生じてい



る例である.(島は, $[0,\frac{1}{5}]$, $[\frac{2}{5},\frac{3}{5}]$, $[\frac{4}{5},1]$)
$\frac{3}{5}\leqq x\leqq\frac{4}{5}$ かつ $f(x)\leqq\frac{4}{5}$ の時, $|f'(x)|\geqq C>1$ ならば, $[\frac{1}{5},\frac{2}{5}]\cup[\frac{3}{5},\frac{4}{5}]$ から出発したほとんどすべての軌道が, この2つの区間の和からいずれ去ることは明らかであろう.



5×5個の小正方形の中の中央上部のものに(左右逆の)同様のグラフをはめこんでいくと, 右図のようなグラフができる. このとき, 3つの島それぞれの中に3つの島が無限に入っている. この場合現れる Cantor 集合は, $C=\{x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{5^n}\ ;\ a_n=0,2,4\}$ であり, この上の一様測度 μ は漸近測度となる. 再び C の外の周期軌道の $D_f(x)$ への寄与に任意性があるので, 前例と同様の状況が生じうる. この場合も, f' の有界性を仮定すれば, $P_1(f)=0$ となる.

5. 主定理について.

証明については, [TK] に(間接的に証明されている場合もあるが)述べてあるので省略. 定理4は不十分なもので f が C^2 級という仮定で十分なものと予想される. 定理2は, 同じ仮定の下で,「$P_1(f)=0$ ならば漸近測度が存在する, ……」と言った形に強められる可能性を残している. 定理3も同様

に不十分であるが，変分原理が（(3)の $\sup = P_1(f)$ の形）成立して平衡測度（supを与える μ）の存在しない例は構成できる．また，Cantor set が不変集合（さらに強く，attractor）になる場合に対応して，

$$P_1(f) < 0 \Rightarrow \text{Cantor attractor の存在}$$

は予想される．

文献（直接引用したもののみ）

[ITN]. On Unimodal Linear Transformations and Chaos I, II.
(Sh. Ito - S. Tanaka - H. Nakada)
Tokyo J. Math. vol. 2. (1979) pp 221-

[Tブ]. カオス，周期点，エントロピー —— 一次元力学系のエルゴード理論，日本物理学会誌 vol. 35 no. 2 (1980). p149-

[Tト] 区間力学系のカオスと周期点，都立大学数学教室セミナー報告．

Y. Oono - Y. Takahashi, Chaos, External Noise, and Fredholm Theory
to appear.

最後に，この報告は，大野克嗣氏（九大）との共同研究をもとに進展したものであることを書きとめておく．森肇先生（九大）からは多くの助言と encouragement を頂いた．深く感謝している．また，江沢・長谷川両先生をはじめとする物理の方々との接触の機会を organize された方々に感謝している．